Subject :
Year . Month . Date . ( )

## حل معادله نمایی

برای حل معادله های نمایی کافی است پایه ها را برابر کنیم.

مثال ۱) معادله ی $16^{3x} = 8^{2-x}$ را حل کنید.

$$2^{4(3x)} = 2^{3(2-x)} \longrightarrow 2^{12x} = 2^{6-3x} \longrightarrow 6-3x = 12x$$

$$\longrightarrow 6 = 15x \longrightarrow \frac{6}{15} = x$$

یکی از حالت های پیچیده تر چنین معادلاتی، وقتی است که پایه ها معکوس یکدیگرند.

مثال ۲) معادله ی $(\sqrt{2}+1)^{5x+3} = (\sqrt{2}-1)^{x}$ را حل کنید.

پاسخ : ابتدا دقت کنید که $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$ . این نشان می دهد این دو عدد معکوس یکدیگرند. بنابراین :

$$(\sqrt{2}+1)^{5x+3} = (\sqrt{2}-1)^{x} = \left((\sqrt{2}+1)^{-1}\right)^{x} = (\sqrt{2}+1)^{-x}$$

$$\longrightarrow 5x+3 = -x \longrightarrow 6x = -3 \longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

گاهی نیز باید از اتحاد اول کمک بگیرید.

مثال ۳) اگر $(\sqrt{2}-1)^{x} = (17+12\sqrt{2})^{3x+1}$ باشد، $x$ را بیابید.

پاسخ : $17+12\sqrt{2} = 17+2(6\sqrt{2}) = (3+2\sqrt{2})^{2}$

$$= \left((\sqrt{2}+1)^{2}\right)^{2} = (\sqrt{2}+1)^{4}$$

بنابراین :

$$(17+12\sqrt{2})^{3x+1} = (\sqrt{2}+1)^{4(3x+1)} = (\sqrt{2}-1)^{x} = (\sqrt{2}+1)^{-x}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(\sqrt{۲}+۱)^{۱۲x+۴} = (\sqrt{۲}+۱)^{-x} \rightarrow ۱۲x+۴ = -x \rightarrow x = -\frac{۴}{۱۳}$

در مواردی که جمع و ضرب داریم باید تغییر متغیر گرفت.

مثال ۴) معادله‌ی $۴^x - ۲^{x+۳} + ۱۶ = ۰$ را حل کنید.

پاسخ: $۴^x - ۲^x \times ۲^۳ + ۱۶ = ۰ \rightarrow ۴^x - ۲^x \times ۸ + ۱۶ = ۰$

$\xrightarrow{۲^x = T > ۰} T^۲ - ۸T + ۱۶ = ۰ \rightarrow (T-۴)^۲ = ۰ \rightarrow T = ۴$

$\rightarrow ۲^x = ۴ \rightarrow x = ۲$

مثال ۵) معادله‌ی $۲^x = \sqrt{۲}^{x+۱} + ۴$ را حل کنید (مشابه ۹۳ خارج)

پاسخ:

$۲^x = \sqrt{۲}^x \times \sqrt{۲} + ۴ \xrightarrow{\sqrt{۲}^x = T > ۰} t^۲ = t\sqrt{۲} + ۴$

$\rightarrow T^۲ - T\sqrt{۲} - ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta} T = \frac{\sqrt{۲} \pm \sqrt{۱۸}}{۲}$

$\rightarrow T = \frac{\sqrt{۲} \pm ۳\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow T_۱ = ۲\sqrt{۲}$ و $T_۲ = -\sqrt{۲}$

چون $T > ۰$ لذا فقط $T_۱$ قابل قبول است.

مثال ۶) معادله‌ی $(\sqrt{۲}+۱)^x + (\sqrt{۲}-۱)^x = \sqrt{۸}$ را حل کنید.

در اینجا دقت کنید که $(\sqrt{۲}+۱)^x (\sqrt{۲}-۱)^x = ۱$ لذا دو عبارت معکوس هم هستند.

نابراین: $(\sqrt{۲}+۱)^x = T > ۰ \rightarrow T + \frac{۱}{T} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$

$\rightarrow \frac{T^۲+۱}{T} = ۲\sqrt{۲} \rightarrow T^۲ + ۱ - ۲\sqrt{۲}T = ۰ \rightarrow T^۲ - ۲\sqrt{۲}T + ۱ = ۰$

$\rightarrow T = \frac{۲\sqrt{۲} \pm \sqrt{۴}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲} \pm ۲}{۲} = \sqrt{۲} \pm ۱$

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date . ( )

$T = \sqrt{۲}+۱ \longrightarrow (\sqrt{۲}+۱)^{x} = \sqrt{۲}+۱ \longrightarrow x = ۱$

$T = \sqrt{۲}-۱ \longrightarrow (\sqrt{۲}+۱)^{x} = (\sqrt{۲}-۱) \longrightarrow x = -۱$

در بعضی موارد پایه‌ها هیچ ارتباطی به هم ندارند. در این موارد از $\log_a$ کمک می‌گیریم. بهتر است $a$ را همان پایه‌ای بگیریم که مجهول را به توان دارد:

مثال ۷) معادله $۲^{x+۳} = ۵$ را حل کنید.

در اینجا طرف مجهول پایه ۲ دارد. بهتر است $\log_۲$ بگیریم:

$\log_۲ ۲^{x+۳} = \log_۲ ۵ \longrightarrow x+۳ = \log_۲ ۵ \longrightarrow x = \log_۲ ۵ - ۳$

مثال ۸) معادله‌ی $۲^{x+۱} = ۳^{۹x-۲}$ را حل کنید.

پاسخ: در اینجا ابتدا بهتر است، مجهول‌ها روی یک پایه باشند:

$۲^{x+۱} = ۳^{x-۲} \longrightarrow ۲^{x} \times ۲ = ۳^{x} \div ۳^{۲} \longrightarrow ۲^{x} \times ۲ = \frac{۳^{x}}{۹}$

$\longrightarrow \frac{۲^{x}}{۳^{x}} = \frac{۱}{۱۸} \longrightarrow (\frac{۲}{۳})^{x} = \frac{۱}{۱۸} \xrightarrow{\log_{\frac{۲}{۳}}}$

$x = \log_{\frac{۲}{۳}} \frac{۱}{۱۸} = -\log_{\frac{۲}{۳}} ۱۸ = \log_{\frac{۳}{۲}} ۱۸$

مثال ۹) اگر $۲^{۱-۲x} = ۳^{x}$ باشد، و جواب معادله عدد $x = \log_b ۲$ باشد، $b$ را بیابید (نتیجتاً دشوار - دشوار - دشوارتر)

پاسخ : از طرفین مثلاً $\log_2$ می‌گیریم :

$$\log_2 2^{1-2x} = \log_2 3^x$$

$$\rightarrow 1-2x = x\log_2 3 \rightarrow 1 = 2x + x\log_2 4$$

$$\rightarrow 1 = x(2+\log_2 4) = x(\log_2 4 + \log_2 3) = x\log_2 12$$

$$\rightarrow \frac{1}{\log_2 12} = x \rightarrow \log_{12} 2 = x \rightarrow b = 12$$

مثال ۱۰) مجموع جواب‌های معادله $100x = x^{\log x}$ را بیابید.

$$\log 100x = \log x^{\log x} \rightarrow \log 100 + \log x = (\log x)\log x$$

$$\rightarrow 2 + \log x = (\log x)^2 \xrightarrow{\log x = t} 2 + T = T^2 \rightarrow T^2 - T - 2 = 0$$

$$\rightarrow (T-2)(T+1) = 0 \rightarrow T = 2, -1 \rightarrow \log x = 2, -1$$

$$\rightarrow x = 100, 0/1 \rightarrow x_1 + x_2 = 100/1$$

بهترین آرزوی

پاینده و پیروز باشید